UNIVERSITÀ DI MILANO

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA
N. 12

CARLO FELICE MANARA

Di un problema relativo ai triangoli

Estratto dal "*Periodico di Matematiche*",
Ser. 4, vol. 29 (1951), pp. 91-98.

MILANO
Anno 1951

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
1951 - Serie IV, vol. XXIX, n. 2

Di un problema relativo ai triangoli

§ I. – In questi ultimi tempi una rivista di divulgazione scientifica ha posto a concorso tra i suoi lettori la seguente questione:

« Costruire un triangolo dati i simmetrici dei vertici rispetto ai lati opposti » [1]

e molti docenti di matematica hanno avuto al proposito richieste di spiegazioni ed aiuti da parte di allievi ed amici, tanto più che la risposta pubblicata a suo tempo sulla rivista stessa non è risultata una soluzione esauriente del problema [2].

L'interesse così sorto sull'argomento mi induce a pensare di far cosa gradita ai lettori del « Periodico » esponendo la discussione di questo problema: ritengo inoltre che l'analisi della questione e delle sue intrinseche difficoltà sia utile perchè si ha qui un esempio, a mio parere notevole, di problema geometrico che a prima vista è giudicato come elementare ed invece richiede, per essere compreso e discusso non superficialmente, i mezzi della Geometria Algebrica e della Teoria delle equazioni algebriche secondo Galois.

Noi dimostreremo qui che il problema non solo non è risolubile con riga e compasso ma dà origine ad un sistema di equazioni algebriche le cui soluzioni non sono esprimibili in funzione dei dati mediante radicali.

Benchè i calcoli che permettono di giungere alla conclusione siano di necessità alquanto laboriosi, pure la linea concettuale del ragionamento è relativamente semplice e la esporremo qui brevemente.

---

(1) *Sapere*: Ed. Hoepli, anno XVI, vol. XXXII, n. 375/6.
(2) Ibid. n. 383/4.

Premettiamo che, conformemente alle convenzioni più comuni, in tutta la presente trattazione indicheremo con ABC i vertici di un triangolo, con $\alpha\ \beta\ \gamma$ i rispettivi angoli e con $a\ b\ c$ i lati opposti (cioè le loro misure in una unità di lunghezza arbitraria ma che supporremo fissata una volta per tutte). Indicheremo poi con $A'B'C'$ i punti simmetrici dei vertici ABC rispetto ai lati opposti e con $a'b'c'$ i lati del triangolo $A'B'C'$. Con questa nomenclatura il problema potrà essere espresso così:

« Costruire il triangolo ABC conoscendo $A'B'C'$ ».

Osserviamo ora che quando si conoscano $a\ b\ c$ il problema può considerarsi risolto, perchè in base alla conoscenza di questi può costruirsi un triangolo $A_1B_1C_1$ uguale ad ABC, che può essere portato a coincidere con esso mediante una congruenza; la quale porterà necessariamente su $A'B'C'$ il triangolo $A_1'B_1'C_1'$ i cui vertici sono i simmetrici dei vertici di $A_1B_1C_1$ rispetto ai lati.

Inoltre quando si conosca la equazione

$$(1) \qquad u^3 - xu^2 + yu - z = 0$$

di III grado in u avente per radici i quadrati di $a\ b\ c$, il triangolo stesso si ottiene (attraverso i suoi lati) in funzione di $x\ y\ z$ per mezzo di radicali, come è chiaro per il fatto che la equazione cubica è risolubile appunto mediante radicali (quadratici e cubici). I tre coefficienti $x\ y\ z$ della equazione (1) saranno quindi da noi brevemente chiamati le coordinate del triangolo ABC (intrinsecamente considerato).

Ad evitare equivoci sulla portata dei nostri ragionamenti sarà bene avvertire esplicitamente che le nostre considerazioni, qui e nel seguito, riguardano il campo algebrico; non ci preoccuperemo quindi per nulla delle ulteriori difficoltà che presenterebbe l'analisi delle questioni di realità degli enti che consideriamo, questioni la cui impostazione richiederebbe la scrittura di relazioni non algebriche (per es. disuguaglianze).

Ora dalle coordinate $x\ y\ z$ del triangolo ABC si possono ottenere razionalmente le coordinate analoghe del triangolo $A'B'C'$, cioè i coefficienti $\xi\ \eta\ \zeta$ della equazione cubica in u

$$(2) \qquad u^3 - \xi u^2 + \eta u - \zeta = 0$$

avente per radici i quadrati dei lati $a'b'c'$.

Supponiamo fissato nel piano un riferimento cartesiano; allora ognuno dei due triangoli può sempre supporsi determinato attraverso la conoscenza delle coordinate dei suoi vertici, dalle quali in particolare si può risalire alla conoscenza dei suoi lati. Pertanto se le coordinate dei vertici di ABC fossero note in funzione di quelle dei vertici di $A'B'C'$ attraverso radicali, anche i lati di ABC sarebbero noti in funzione di quelli di $A'B'C'$ mediante radicali. Ma allora anche le coordinate $x\ y\ z$ di ABC sarebbero esprimibili in funzione delle analoghe coordinate $\xi\ \eta\ \zeta$ di $A'B'C'$ mediante radicali, giacchè si può passare da $\xi\ \eta\ \zeta$ ad $x\ y\ z$ ricavando anzitutto $a'b'c'$ in funzione di $\xi\ \eta\ \zeta$, in secondo luogo $a\ b\ c$ in funzione di $a'b'c'$ ed infine $x\ y\ z$ in funzione di $a\ b\ c$.

Se dunque riusciremo a dimostrare che le funzioni algebriche che dànno esplicitamente $x\ y\ z$ in funzione di $\xi\ \eta\ \zeta$ non sono esprimibili mediante radicali, avremo anche dimostrato che il problema algebrico di determinare ABC quando sia noto $A'B'C'$ non è risolubile mediante radicali.

Il paragrafo II di questo articolo sarà appunto dedicato alla ricerca ed alla scrittura delle relazioni fondamentali che legano le coordinate dei triangoli ABC ed $A'B'C'$.

Per comodità indicheremo con s e σ le aree dei triangoli ABC ed $A'B'C'$ rispettivamente, che sono legate ai coefficienti delle equazioni (1) e (2) dalle relazioni:

$$16s^2 = 4y - x^2 \tag{3}$$

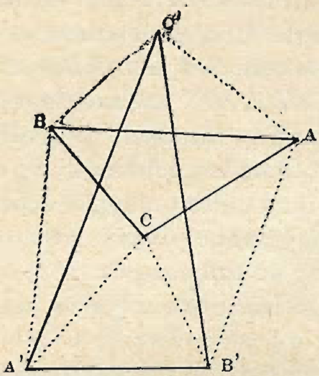
$$16\sigma^2 = 4\eta - \xi^2 \tag{4}$$

(conseguenze materiali della nota relazione detta di ERONE) e scriveremo le relazioni che legano le $x\ s\ z$ alle $\xi\ \sigma\ \zeta$.

Invero, in base a ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti or ora, il nostro scopo sarà raggiunto se dimostreremo che le grandezze $x\ s\ z$ non possono essere espresse mediante radicali in funzione di $\xi\ \sigma\ \zeta$.

Infine il paragrafo III sarà dedicato a trarre le conclusioni dalle relazioni stabilite.

§ II. - Il dato fondamentale del problema, che ci permetterà la scrittura delle relazioni che abbiamo in vista è che i triangoli $A'BC$, $BC'A$, CAB' sono simmetrici del triangolo ABC rispetto ai suoi lati (cfr. la fig. nella pagina seguente). Allora una prima relazione tra i due triangoli ABC ed $A'B'C'$ si ottiene applicando il teorema detto di CARNOT ai triangoli $AB'C'$, $A'BC'$ $A'B'C$. Si ha infatti la relazione



$$(a')^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3\alpha$$

ed altre due analoghe che si ottengono permutando circolarmente le lettere $a\, b\, c$, $a'b'c'$, $\alpha\, \beta\, \gamma$. Ma si ha come è noto

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$$

e $\cos\alpha$ si ottiene, ancora in forza dello stesso teorema di CARNOT, dalla relazione

$$\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc.$$

A calcoli fatti si ha infine

$$b^2c^2(a')^2 = c^4b^2 + b^4c^2 - c^6 - b^6 + a^6 - 3c^2a^4 + 3a^2b^2c^2 + 3c^4a^2 - \\ - 3a^4b^2 + 3a^2b^4.$$

Di qui, tenendo conto delle relazioni esistenti tra i coefficienti della (1) e le funzioni simmetriche elementari delle sue radici si ottiene

$$z(a')^2 = 2a^4(x^2 - 4y) + a^2(z + 4xy - x^3)$$

e, ricordando la relazione (3) (di ERONE)

$$(5) \qquad z(a')^2 = -32a^4s^2 + a^2(z + 16s^2x)$$

ed altre due analoghe che si ottengono permutando circolarmente le lettere $a\, b\, c$ ed $a'b'c'$. Sommando membro a membro queste tre relazioni si ha infine la

$$(\mathrm{I}) \qquad z\xi = 256s^4 + xz.$$

Moltiplicandole invece membro a membro si ha

$$(\mathrm{II}) \qquad z\zeta = -28672zs^6 + 65536xs^8 + 16z^2s^2x + z^3.$$

Una terza relazione si ottiene considerando le aree dei due triangoli ABC ed $A'B'C'$; invero è chiaro che l'area di $A'B'C'$ si ottiene come somma algebrica (con le solite convenzioni riguardanti il segno delle aree triangolari) delle aree di altri opportuni triangoli; si ha precisamente

$$A'B'C' = ABC + AC'B + BA'C + CB'A + AB'C' + BC'A' + CA'B'.$$

In formule, la relazione tra le aree viene espressa dalla seguente equazione

$$\sigma = 4s - (ab \operatorname{sen} 3\gamma + bc \operatorname{sen} 3\alpha + ca \operatorname{sen} 3\beta)/2.$$

Ma si ha, come è noto, la relazione

$$\operatorname{sen} \alpha = 2s/bc$$

ed altre due analoghe, che si ottengono permutando le lettere $a\, b\, c$, $\alpha\, \beta\, \gamma$. Da queste e dalle note formule di triplicazione, tenendo conto delle relazioni esistenti tra i coefficienti delle equazioni (1) e (2) si ha in definitiva la

$$\text{(III)} \qquad z\sigma = s(16s^2x - 5z).$$

Il sistema delle tre equazioni (I), (II) e (III) permette di ricavare le $x\; s\; z$ come funzioni di $\xi\; \sigma\; \zeta$; dimostreremo nel prossimo paragrafo che queste funzioni algebriche non sono esprimibili mediante radicali.

§ III. - Al fine di discutere più comodamente il sistema formato dalle equazioni (I), (II), (III) le riscriveremo qui cambiando leggermente le notazioni, affinchè la interpretazione geometrica che daremo si presenti al lettore nell'aspetto che più gli è abituale. Riscriviamo qui le equazioni suddette ponendo

$$\xi - x = X \qquad s = Y \qquad z = Z.$$

Si ottiene così il sistema

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} XZ = 256Y^4 \\ \zeta Z = -28672ZY^6 + 65536(\xi - X)Y^8 + 16Z^2Y^2(\xi - X) + Z^3 \\ \sigma Z = Y\{16Y^2(\xi - X) - 5Z\} \end{cases}$$

che, interpretato nello spazio in cui $X\; Y\; Z$ sono coordinate cartesiane di punto, vale a determinare le intersezioni di tre superficie algebriche, variabili in funzione dei parametri $\xi\,\sigma\,\zeta$. Si osservi ora che la prima delle equazioni (IV) è lineare in Z; ciò permette anzitutto di eliminare facilmente Z giungendo ad un sistema di due equazioni nelle due variabili XY; ed in secondo luogo assicura che ad ogni soluzione di quest' ultimo sistema corrisponde una soluzione del (IV).

La suddetta eliminazione porta al sistema

$$\begin{cases} 16\sigma Y = (\xi - X)X - 80Y^2 & (6) \\ \zeta X = -112X^2Y^2 + X^3(\xi - X) + 16X(\xi - X)Y^2 + 256Y^4 & (7) \end{cases}$$

che, interpretando geometricamente X ed Y come le coordinate cartesiane di un punto, vale a determinare le intersezioni tra due curve entrambe passanti per l'origine delle coordinate: la conica k rappresentata dalla equazione (6) e la quartica Q rappresentata dalla (7). Dato il significato geometrico che ha la grandezza s (qui rappresentata dalla coordinata Y) la intersezione fissa e razionalmente nota che le due curve k e Q hanno nell' origine delle coordinate non fornisce nessuna soluzione del nostro problema, poichè corrisponde ad un triangolo ABC di area nulla (cioè avente i tre vertici coincidenti od allineati). Prenderemo quindi in considerazione soltanto le altre sette intersezioni delle due curve, fuori dell' origine.

Ora per dimostrare la non risolubilità con radicali del nostro problema per valori generici dei parametri $\xi\,\sigma\,\zeta$ possiamo fissare due tra questi, dando a ξ il valore 1 ed a σ il valore 1/16, lasciando invece variare il terzo ζ. Il gruppo delle rette che proietta dall' origine le sette ulteriori intersezioni di k con Q è dato da

$$(8)\quad \zeta X(X^2 + 80Y^2)^3 = (X - Y)^3(256Y^4 - 128X^2Y^2 - X^4) + \\ + X(X - Y)^2(X^2 + Y^2)(X^2 + 80Y^2).$$

Ponendo, per semplicità

$$X = 1 \qquad Y = t \qquad \zeta = v$$

ci troveremo a discutere il comportamento della funzione algebrica $t(v)$ definita implicitamente dalla equazione

$$(9)\qquad (1 + 80t^2)^3 \cdot v = (1 - t)^3(256t^4 - 128t^2 - 1) + \\ + (1 - t)^2(1 + t^2)(1 + 80t^2)$$

che scriveremo anche brevemente

$$v \cdot D(t) = N(t)$$

indicando con $D(t)$ ed $N(t)$ rispettivamente i polinomii di VI e VII grado in t che compaiono al primo ed al secondo membro della (9). Ora nel piano in cui t e v sono coordinate cartesiane di punto questa equazione rappresenta una curva φ algebrica del VII ordine, avente un punto sestuplo nel punto improprio dell'asse delle v e quindi unisecata dalle parallele a quest' asse e perciò razionale. Se essa si spezzasse ciò potrebbe avvenire soltanto in corrispondenza allo staccamento di rette parallele all'asse delle v; e ciò importerebbe l'esistenza di radici comuni ai polinomii $D(t)$ ed $N(t)$, il che non è, come si verifica facilmente.

Quindi la φ è irriducibile e pertanto il gruppo di monodromia della funzione $t(v)$ è transitivo ([3]). Rimane a dimostrarsi che la funzione $t(v)$ non può esprimersi mediante radicali; ora a questo si giunge ricordando che la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che il gruppo di monodromia sia il gruppo metaciclico od un suo sottogruppo; quindi, nel caso presente, il gruppo metaciclico (od un suo sottogruppo) su sette elementi, tanti quanti sono i rami della funzione $t(v)$ ([4]). Ma, come è noto, tale gruppo su più di 3 elementi non contiene scambi isolati tra due determinazioni, mentre il gruppo di monodromia della $t(v)$ contiene uno scambio isolato, in corrispondenza al valore $v = 0$, perchè il polinomio $N(t)$ ha la unica radice doppia $t = 1$ ([5])

A conclusione della nostra analisi potremo dunque enunciare il

TEOREMA. - Il problema algebrico che corrisponde al problema geometrico di costruire un triangolo conoscendo i simmetrici dei vertici rispetto ai lati non è risolubile per radicali.

([3]) Cfr. ENRIQUES e CHISINI: *Teoria Geometrica delle equazioni algebriche.* Vol. I, Lib. II, § 32.

([4]) Cfr. BIANCHI: *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois.* §§ 87, 88.

([5]) Alla conclusione si perviene anche facilmente osservando che, in forza di un noto teorema sui gruppi di sostituzioni, il gruppo di monodromia, transitivo, contenendo uno scambio è il gruppo totale oppure è imprimitivo; ma qui imprimitivo non può essere perchè opera su un numero primo (sette) di elementi.

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - 1951

U N I V E R S I T À   D I   M I L A N O

Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica

N. 1 — **O. Chisini** — Dimostrazione delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione di un piano quadruplo. *1949*

N. 2 — **C. Tibiletti** — Sull'integrazione grafica delle equazioni differenziali. *1949*

N. 3 — **C. F. Manara** — Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane. *1950*

N. 4 — **C. Tibiletti** — L'evoluzione della geometria secondo le idee di Klein. *1950*

N. 5 — **G. Prodi** — Un'osservazione sugl'integrali dell'equazione $y'' + A(x)\,y = 0$ nel caso $A(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$. *1950*

N. 6 — **M. Cugiani** — I Campi Quadratici e l'Algoritmo Euclideo. *1950*

N. 7 — **C. Tibiletti** — Procedimenti grafici per l'integrazione delle equazioni differenziali. *1950*

N. 8 — **C. Tibiletti** — Costruzione delle curve multiple risolubili prive di punti di diramazione: caso generale. *1950*

N. 9 — **C. Tibiletti** — Sulle curve intersezioni complete di due superficie. *1950*

N. 10 — **M. Cugiani** — Sulle funzioni simmetriche di particolari sistemi di interi. *1950.*

N. 11 — **C. F. Manara** — Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plückeriani. *1951*

ACHILLEA - MILANO